



INSPECTORATUL
ȘCOLAR JUDEȚEAN
TULCEA



INSPECTORATUL
ȘCOLAR
JUDEȚEAN
BĂCĂU



INSPECTORATUL
ȘCOLAR JUDEȚEAN
TELEORMAN

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
„LAURENȚIU PANAITOPOL”
EDIȚIA A XV-A

SUBIECTE
Clasa a XII-a

Problema 1. Pe mulțimea \mathbb{R}^+ a numerelor reale mai mari sau egale cu zero considerăm operația $*$, care are proprietatea că este comutativă și asociativă și pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$ avem

$$x * y * z = x + y + z + xy + yz + zx + xyz.$$

Determinați legea și arătați că $(\mathbb{R}^+, *)$ este monoid.

Problema 2. Fie A un inel finit comutativ cu proprietatea că suma soluțiilor ecuației $x^2 = 1$ este nenulă.

- Demonstrați că $1 + 1 = 0$.
- Demonstrați că ecuația $x^2 = 1$ are cel mult două soluții distincte.
- Dați exemplu de inel în care ecuația de mai sus are două soluții distincte.

Problema 3. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu derivata continuă. Arătați că

$$\max f^2 \leq 3 \int_0^1 f^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (f'(x)^2) dx.$$

Problema 4. Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{n^2 + n + k^2}{n^2 + k^2}.$$

*Fiecare problemă se notează de la 0 la 21 de puncte și 16 puncte sunt din oficiu
Timp de lucru: 4 ore*